

Korrespondenzen der FOURIER - Transformation I

A: THEOREME



1	F-Transformation	$s(t)$	$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$
2	Inverse F-Transformation	$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df$	$S(f)$
3	Zerlegung reeller Zeitfunktionen mit	$s(t) = s_g(t) + s_u(t)$	$S(f) = \text{Re}\{S(f)\} + j \text{Im}\{S(f)\}$
		$s_g(t)$	$\text{Re}\{S(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} s_g(t) \cdot \cos(2\pi ft) dt$
		$s_u(t)$	$j \text{Im}\{S(f)\} = -j \int_{-\infty}^{+\infty} s_u(t) \cdot \sin(2\pi ft) dt$
4	Zeitumkehr	$s(-t)$	$S(-f)$ bei reellen Zeitfunktionen auch $S^*(f)$
5	Konjugiert komplexe Zeitfunktionen	$s^*(t)$	$S^*(-f)$
6	Symmetrie	$S(t)$	$s(-f)$
7	Faltung	$s_1(t) * s_2(t)$	$S_1(f) \cdot S_2(f)$
8	Multiplikation	$s_1(t) \cdot s_2(t)$	$S_1(f) * S_2(f)$
9	Superposition	$\sum_i a_i \cdot s_i(t)$	$\sum_i a_i \cdot S_i(f)$

Korrespondenzen der FOURIER - Transformation II

A: THEOREME



10	Ähnlichkeit	$s(bt)$	$\frac{1}{ b } S\left(\frac{f}{b}\right)$
11	Verschiebung	$s(t - t_0)$	$S(f) \cdot e^{-j2\pi f t_0}$
12	Differentiation	$\frac{d^n}{dt^n} s(t)$	$(j2\pi f)^n \cdot S(f)$
13	Integration	$\int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau$	$\frac{S(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2} s(0) \cdot \delta(f)$
14	Modulation	$s(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2} [S(f - f_0) + S(f + f_0)]$
15	Periodische Zeitfunktion $f(t) = f(t + nT)$	$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \cdot e^{jn2\pi \frac{t}{T}}$	$F(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$ <p style="text-align: center;">mit $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$</p> $C_n = \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot e^{-jn2\pi \frac{t}{T}} dt$

Korrespondenzen der FOURIER - Transformation III

B: Funktionen

s(t)

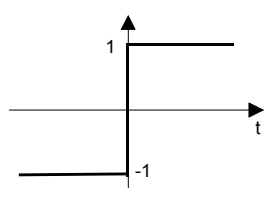
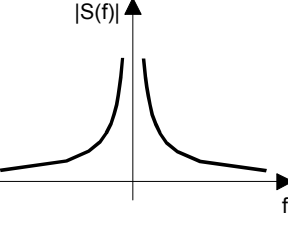
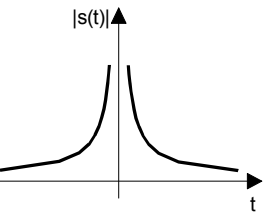
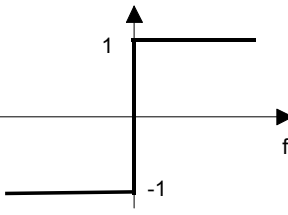
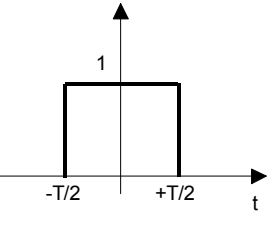
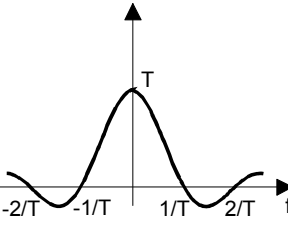
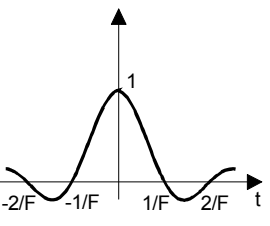
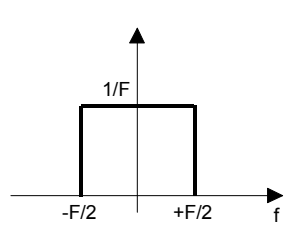
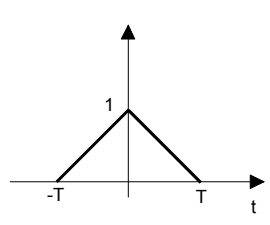
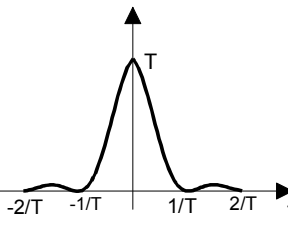
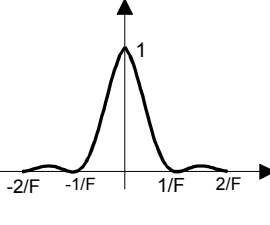
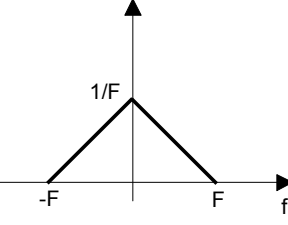


S(f)

1		$\delta'(t)$		$j2\pi f$
2		$\delta(t)$		1
3		1		$\delta(f)$
4		$\sigma(t)$		$\frac{1}{2}\delta(f) - \frac{j}{2\pi f}$
5		Exponentialimpuls $\sigma(t) \cdot \exp\left(\frac{-t}{T}\right)$ mit $T > 0$		$\frac{T}{1 + j2\pi T f}$

Korrespondenzen der FOURIER - Transformation IV

B: Funktionen $s(t)$ \circ ————— \bullet $S(f)$

6		$\text{sgn}(t)$		$-j \frac{1}{\pi f}$
7		$j \frac{1}{\pi t}$		$\text{sgn}(f)$
8		$\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$		$T \cdot \text{si}(\pi f T)$
9		$\text{si}(\pi t F)$		$\frac{1}{F} \text{rect}\left(\frac{f}{F}\right)$
10		$\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$		$T \cdot \text{si}^2(\pi f T)$
11		$\text{si}^2(\pi f t)$		$\frac{1}{F} \Lambda\left(\frac{f}{F}\right)$

Korrespondenzen der FOURIER - Transformation V

B: Funktionen $s(t)$ \circ ————— \bullet $S(f)$

12		cos-Impuls $\cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$		$\frac{T}{2} \left[\text{si}\left(\pi \cdot \left(f - \frac{1}{2T}\right) \cdot T\right) + \text{si}\left(\pi \cdot \left(f + \frac{1}{2T}\right) \cdot T\right) \right]$
13		$\frac{1}{2} \left[\text{si}\left(\pi \left(t - \frac{1}{2F}\right) F\right) + \text{si}\left(\pi \left(t + \frac{1}{2F}\right) F\right) \right]$		$\frac{1}{F} \cdot \cos\left(\frac{\pi f}{F}\right) \cdot \text{rect}\left(\frac{f}{F}\right)$
14		cos^2-Impuls $\cos^2\left(\frac{\pi t}{T}\right) \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$		$\frac{T}{4} \left[\text{si}\left(\pi \left(f - \frac{1}{T}\right) T\right) + 2 \text{si}(\pi f T) + \text{si}\left(\pi \left(f + \frac{1}{T}\right) T\right) \right]$
15		$\frac{1}{4} \left[\text{si}\left(\pi \left(t - \frac{1}{F}\right) F\right) + 2 \text{si}(\pi t F) + \text{si}\left(\pi \left(t + \frac{1}{F}\right) F\right) \right]$		$\frac{1}{F} \cos^2\left(\frac{\pi f}{F}\right) \cdot \text{rect}\left(\frac{f}{F}\right)$
16		Gauß-Impuls $1 \cdot e^{-\pi \left(\frac{t}{T}\right)^2}$		$T \cdot e^{-\pi (fT)^2}$
17		Schahfunktion: $\text{III}\left(\frac{t}{T}\right) = \text{rep}_T T \cdot \delta(t)$		$T \cdot \text{III}(fT) = \text{rep}_{\frac{1}{T}} \delta(f)$

Korrespondenzen der FOURIER - Transformation VI

B: Funktionen

s(t)



S(f)

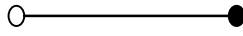
18		$\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$		$\frac{1}{2}\left[\delta\left(f + \frac{1}{T}\right) + \delta\left(f - \frac{1}{T}\right)\right]$
19		$\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$		$j\frac{1}{2}\left[\delta\left(f + \frac{1}{T}\right) - \delta\left(f - \frac{1}{T}\right)\right]$
20		geschalteter cos-Impuls $\sigma(t) \cdot \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$		$\frac{1}{4}\left[\delta\left(f + \frac{1}{T}\right) + \delta\left(f - \frac{1}{T}\right)\right] - \frac{j}{2\pi} \cdot \frac{f}{f^2 - \left(\frac{1}{T}\right)^2}$
21				
22				

Eigenschaften: $F(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j2\pi ft} dt$

$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(f) \cdot e^{j2\pi ft} dt$

Korrespondenzen der LAPLACE - Transformation I

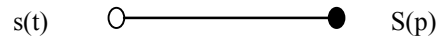
A: Theoreme

s(t)  S(p)

1	Laplace-Transformation	$s(t) \equiv s(t) \cdot \sigma(t)$	$S(p) = \int_0^{\infty} s(t) \cdot e^{-pt} dt$
2	Inverse Laplace-Transformation	$\frac{1}{j2\pi} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \underline{S}(p) \cdot e^{pt} dp$	$S(p)$
3	Superposition	$\sum_i a_i s_i(t)$	$\sum_i a_i S_i(p)$
4	Ähnlichkeit	$s(a \cdot t) ; a > 0$	$\frac{1}{a} \cdot S\left(\frac{p}{a}\right)$
5	Verschiebung	$s(t - t_0) \cdot \sigma(t - t_0)$ für $t_0 > 0$	$S(p) \cdot e^{-pt_0}$
		$s(t + t_0)$ für $t > 0$	$e^{pt_0} \left\{ S(p) - \int_0^{t_0} s(t) \cdot e^{-pt} dt \right\}$
		$s(t) \cdot e^{-p_0 t}$	$S(p + p_0)$
6	Dämpfung	$s(t) \cdot e^{-at}$	$S(p + a)$
7	Integration	$\int_0^t s(t) dt$	$\frac{1}{p} \cdot S(p)$
		$\int_0^t s(t) dt$	$\int_p^{\infty} S(q) dq$

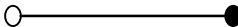
Korrespondenzen der LAPLACE - Transformation II

A: Theoreme



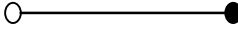
8	Differentiation	$\frac{d}{dt} s(t)$	$p \cdot S(p) - s(0)$
		$\frac{d^2}{dt^2} s(t)$	$p^2 \cdot S(p) - p \cdot s(0) - s'(0)$
		$\frac{d^n}{dt^n} s(t)$	$p^n \cdot S(p) - \sum_{i=0}^{n-1} p^{n-1-i} \cdot s^{(i)}(0)$
		$-t \cdot s(t)$	$\frac{d}{dp} S(p)$
		$(-1)^n \cdot t^n \cdot s(t)$	$\frac{d^n}{dp^n} S(p)$
9	Faltung	$s_1(t) * s_2(t)$	$S_1(p) \cdot S_2(p)$
		$s_1(t) \cdot s_2(t)$	$\frac{1}{j2\pi} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} S_1(q) \cdot S_2(p-q) dq$
10	Periodizität	$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} s_0(t - nT_p)$	$\sum_{n=0}^{\infty} S_0(p) \cdot e^{-p \cdot nT_p} = \frac{S_0(p)}{1 - e^{-pT}}$
11	Grenzwertsätze	$\lim_{t \rightarrow 0} s(t) = s(0)$	$\lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot S(p)$
		$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = s(\infty)$	$\lim_{p \rightarrow 0} p \cdot S(p)$
		Beachte:	Grenzwerte müssen existieren !!!

Korrespondenzen der LAPLACE - Transformation III

B: Funktionen $s(t) = s(t) \cdot \sigma(t)$  S(p)

1	0	0
2	$\delta(t)$	1
3	$\sigma(t)$	$\frac{1}{p}$
4	$r(t) = t$	$\frac{1}{p^2}$
5	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ n unganzz $(n-1)! = \Gamma(n)$	$\frac{1}{p^n}$ n > 0 ; n auch unganzz
6	$e^{\mp a \cdot t}$	$\frac{1}{p \pm a}$
7	$a \cdot e^{-at}$	$\frac{a}{a + p}$
8	$\frac{1}{a} \cdot (e^{at} - 1)$	$\frac{1}{p(p-a)}$
9	$\frac{1}{a} \cdot (1 - e^{-at})$	$\frac{1}{p(p+a)}$
10	$\sin(a \cdot t)$	$\frac{a}{p^2 + a^2}$
11	$\cos(a \cdot t)$	$\frac{p}{p^2 + a^2}$

Korrespondenzen der LAPLACE - Transformation IV

B: Funktionen $s(t) = s(t) \cdot \sigma(t)$  S(p)

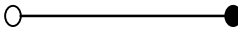
12	$\sinh(a \cdot t)$	$\frac{a}{p^2 - a^2}$
13	$\cosh(a \cdot t)$	$\frac{p}{p^2 - a^2}$
14	$\frac{1}{a^2} (1 - \cos(a \cdot t))$	$\frac{1}{p \cdot (p^2 + a^2)}$
15	$\frac{1}{a^2} (\cosh(a \cdot t) - 1)$	$\frac{1}{p \cdot (p^2 - a^2)}$
16	$e^{\mp at} \cdot \cos(b \cdot t)$	$\frac{p \pm a}{(p \pm a)^2 + b^2}$
17	$e^{\mp at} \cdot \sin(b \cdot t)$	$\frac{b}{(p \pm a)^2 + b^2}$
18	$\frac{e^{b \cdot t} - e^{a \cdot t}}{b - a}$	$\frac{1}{(p - a) \cdot (p - b)}$
19	$\frac{e^{-a \cdot t} - e^{-b \cdot t}}{b - a}$	$\frac{1}{(p + a) \cdot (p + b)}$
20	$t \cdot e^{a \cdot t}$	$\frac{1}{(p - a)^2}$
21	$\frac{b \cdot e^{b \cdot t} - a \cdot e^{a \cdot t}}{b - a}$	$\frac{p}{(p - a) \cdot (p - b)}$

Korrespondenzen der LAPLACE - Transformation V

B: Funktionen $s(t) = s(t) \cdot \sigma(t)$ \circ ————— \bullet S(p)

22	$\frac{1}{a^2 + b^2} (a^2 \cdot e^{-at} - a \cdot b \cdot \sin(b \cdot t) + b^2 \cdot \cos(b \cdot t))$	$\frac{p^2}{(p + a) \cdot (p^2 + b^2)}$
23	$\frac{\omega_0}{\sqrt{1 - D^2}} \cdot \sin(\omega_0 \sqrt{1 - D^2} \cdot t) \cdot e^{-D\omega_0 t} ; \text{für } D < 1$	$\frac{\omega_0^2}{p^2 + 2 \cdot D \cdot \omega_0 \cdot p + \omega_0^2}$
24	$1 - \frac{1}{\sqrt{1 - D^2}} \cdot \sin(\omega_0 \sqrt{1 - D^2} \cdot t + \varphi) \cdot e^{-D\omega_0 t}$ mit $\varphi = -\arctan(D)$; $D < 1$	$\frac{\omega_0^2}{p \cdot (p^2 + 2 \cdot D \cdot \omega_0 \cdot p + \omega_0^2)}$
25	$\frac{1}{\sqrt{1 - D^2}} \cdot \cos(\omega_0 \sqrt{1 - D^2} \cdot t + \varphi) \cdot e^{-D\omega_0 t}$ mit $\varphi = -\arctan\left(\frac{D}{\sqrt{1 - D^2}}\right)$	$\frac{p}{p^2 + 2 \cdot D \cdot \omega_0 \cdot p + \omega_0^2}$
26	$\operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2 \cdot \sqrt{t}}\right) = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{a}{2 \cdot \sqrt{t}}\right)$	$\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p}$
27	$\frac{b \cdot e^{at} - a \cdot e^{bt}}{a \cdot b \cdot (a - b)} + \frac{1}{a \cdot b}$	$\frac{1}{p \cdot (p - a) \cdot (p - b)}$
28	$\frac{1}{a^2} \cdot [1 + (a \cdot t - 1) \cdot e^{at}]$	$\frac{1}{p \cdot (p - a)^2}$
29	$\frac{1}{a^2} \cdot [e^{at} - 1 - a \cdot t]$	$\frac{1}{p^2 \cdot (p - a)}$

Korrespondenzen der LAPLACE - Transformation VI

B: Funktionen $s(t) = s(t) \cdot \sigma(t)$  S(p)

30	$\frac{(b-a) \cdot e^{a-t} + (c-a) \cdot e^{b-t} + (a-b) \cdot e^{c-t}}{(c-b) \cdot (c-a) \cdot (a-b)}$	$\frac{1}{(p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$
----	---	---

Residuensatz:

$$f(t) = L^{-1}\{F(p)\} = \sum_{i=1}^n (p - \beta_i) F(p) e^{p t} \Big|_{p=\beta_i} \quad \text{für } i=1,2,3,\dots,n$$

Rücktransformationsformel:

$$f(t) = \sum_{j=1}^k \frac{1}{(r_j - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_j} \left\{ \frac{d^{r_j-1}}{dp^{r_j-1}} (p - p_j)^{r_j} \cdot F(p) \cdot e^{p t} \right\}$$

Korrespondenzen zur Z-Transformation I

A: Theoreme:

	Theorem	Originalsequenz $\{f(kT)\}$	Bildfunktion $F(z)$
1	Definition	$f(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint F(z) \cdot z^{k-1} dz$	$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \cdot z^{-n}$
2	Linearität	$a_1 f_1(kT) + a_2 f_2(kT)$	$a_1 F_1(z) + a_2 F_2(z)$
3	Verschiebung	$f(kT - k_0 T) ; k_0 \geq 0$	$F(z) \cdot z^{-k_0}$
		$f(kT + k_0 T) ; k_0 \geq 0$	$F(z) \cdot z^{k_0} - \sum_{i=0}^{k_0-1} f(i \cdot T) \cdot z^{k_0-i}$
4	Faltung	$f_1(kT) * f_2(kT)$ $= \sum_{i=0}^k f_1(iT) \cdot f_2((k-i)T) \quad ; f_1, f_2 \text{ kausal}$	$F_1(z) \cdot F_2(z)$
5	Differentiation	$k \cdot f(kT)$	$-z \cdot \frac{dF(z)}{dz}$
		$k^2 \cdot f(kT)$	$z^2 \cdot \frac{d^2}{dz^2} F(z) - z \cdot \frac{dF(z)}{dz}$
6	Exponenten-Multiplikation	$a^k \cdot f(kT)$	$F\left(\frac{z}{a}\right)$
7	Anfangswert	$\lim_{k \rightarrow 0} f(kT) = f(0) ; \text{ falls } f(< 0) \equiv 0$	$\lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$
8	Endwert	$\lim_{k \rightarrow \infty} f(kT)$	$\lim_{z \rightarrow 1+} (z-1) \cdot F(z)$

Korrespondenzen zur Z-Transformation II

B: Funktionen:

1	Einheitsimpulsfolge	$\delta(kT)$	1
2	Sprungfolge	$\sigma(kT)$	$\frac{z}{z-1}$
3	Rampenfolge	$\sigma(kT) \cdot k$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
4	Parabelfolge	$\sigma(kT) \cdot k^2$	$\frac{z \cdot (z+1)}{(z-1)^3}$
5	Kosinusfolge	$\sigma(kT) \cdot \cos(\Omega kT)$	$\frac{z \cdot (z - \cos(\Omega T))}{z^2 - 2 \cdot z \cdot \cos(\Omega T) + 1}$
6	Sinusfolge	$\sigma(kT) \cdot \sin(\Omega kT)$	$\frac{z \cdot \sin(\Omega T)}{z^2 - 2 \cdot z \cdot \cos(\Omega T) + 1}$
7	Exponentialfolge	$\sigma(kT) \cdot e^{-a \cdot k \cdot T}$	$\frac{z}{z - e^{-a \cdot T}}$
		$\sigma(kT) \cdot k \cdot e^{-a \cdot k \cdot T}$	$\frac{z \cdot e^{-a \cdot T}}{(z - e^{-a \cdot T})^2}$
8	Komplexe Potenzfolge	$\sigma(kT) \cdot z_1^k$	$\frac{z}{z - z_1}$

Weitere Korrespondenzen zur Z-Transformation III

B: Funktionen:

1	$\sigma(k) \cdot k \cdot s_1^k$	$\frac{z \cdot s_1}{(z - s_1)^2}$	$ z > s_1 $
2	$\sigma(k) \cdot k^2 \cdot s_1^k$	$\frac{z \cdot s_1 \cdot (z + s_1)}{(z - s_1)^3}$	$ z > s_1 $
3	$\sigma(k - k_0) \cdot \binom{k - 1}{k_0 - 1} \cdot s_1^{k - k_0}$	$\frac{1}{(z - s_1)^{k_0}}$	$ z > s_1 $
4	$\sigma(k) \cdot \sin(\omega_0 \cdot k \cdot T) \cdot s_1^k$	$\frac{z \cdot s_1 \cdot \sin(\omega_0 \cdot T)}{z^2 - 2 \cdot z \cdot s_1 \cdot \cos(\omega_0 \cdot T) + s_1^2}$	$ z > s_1 $
5	$\sigma(k) \cdot \cos(\omega_0 \cdot k \cdot T) \cdot s_1^k$	$\frac{z \cdot [z - s_1 \cdot \cos(\omega_0 \cdot T)]}{z^2 - 2 \cdot z \cdot s_1 \cdot \cos(\omega_0 \cdot T) + s_1^2}$	$ z > s_1 $
6	$\sigma(k) \cdot k \cdot \sin(\omega_0 \cdot T)$	$\frac{z \cdot (z^2 - 1) \cdot \sin(\omega_0 \cdot T)}{[z^2 - 2 \cdot z \cdot \cos(\omega_0 \cdot T) + 1]^2}$	$ z > 1$
7	$\sigma(k) \cdot k \cdot \cos(\omega_0 \cdot T)$	$\frac{z \cdot [(z^2 + 1) \cdot \cos(\omega_0 \cdot T) - 2 \cdot z]}{[z^2 - 2 \cdot z \cdot \cos(\omega_0 \cdot T) + 1]^2}$	$ z > 1$
8	$\sum_{n=0}^{\infty} (a \cdot e^{j\varphi})^n \cdot \delta(k - n)$	$\sum_{n=0}^{\infty} (a \cdot e^{j\varphi})^n \cdot z^{-n}$	$\left \frac{a}{z} \right < 1$